Concours d'admission de 1997

Mathématiques I

Option scientifique

Vendredi 23 mai 1997 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats.

Sont autorisées :
- *Une règle graduée.*
- *Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.*

EXERCICE 1 (5 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ étant rapporté à sa base canonique, on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à A.

I désigne la matrice unité d'ordre 4.

1) a) Déterminer les valeurs propres de f.

b) Déterminer les vecteurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Le détail de la méthode utilisée et les principales étapes du calcul devront figurer sur la copie.

2) On considère les vecteurs $\varepsilon_1 = (1,1,0,0)$, $\varepsilon_3 = (0,0,1,1)$.

a) Déterminer des vecteurs ε_2 et ε_4 vérifiant les conditions suivantes :

$$f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1,\ f(\varepsilon_4) = \varepsilon_3 + \varepsilon_4,\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \text{ est une base } \mathcal{B}' \text{ de } \mathbb{R}^4.$$

b) Quelle est la matrice A' de f relativement à $\mathcal{B}'$?

c) Calculer A'^n, pour tout n de $\mathbb{N}^*$. En déduire A^n.

EXERCICE 2 (5 points)

1) Pour $x \in]0,1[$ et m entier on pose $f_m(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^m = \sum_{k=0}^{m} x^k$.

a) Donner une expression simplifiée de $f_m(x)$ et en déduire $\lim_{m\to\infty} f_m(x)$.

b) Donner de même une expression de $f'_m(x)$, $f''_m(x)$ (où f'_m et f''_m désignent les deux premières dérivées de la fonction f_m), et en déduire $\lim_{m\to\infty} f'_m(x)$, $\lim_{m\to\infty} f''_m(x)$.

c) Indiquer comment on démontrerait que l'on a :

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ \sum_{k=\ell}^{\infty} C_k^\ell x^{k-\ell} = \frac{1}{(1-x)^{\ell+1}}$$

(le coefficient binomial C_k^ℓ, que l'on pourra noter $\binom{k}{\ell}$, ayant sa signification habituelle).

Une urne contient des boules de trois catégories, indiscernables au toucher : des boules rouges en proportion p_1, des boules bleues en proportion p_2 et des boules incolores en proportion p_3, avec : $p_1, p_2, p_3 \in]0, 1[$. (On pourra poser $p_1 + p_2 = 1 - p_3 = q$)

On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule, en notant à chaque fois la nature de la boule obtenue, et en la replaçant dans l'urne avant le tirage suivant.

2) Soit X_1 le nombre aléatoire de tirages juste nécessaire pour obtenir, pour la première fois, une boule incolore. Déterminer la loi de X_1 et vérifier que $\sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 = k) = 1$. Préciser l'espérance et la variance de X_1.

3) Soit X_2 le nombre aléatoire de tirages juste nécessaire pour obtenir, pour la deuxième fois, une boule incolore.

a) Déterminer la loi de X_2. Vérifier que $\sum_{k=2}^{\infty} P(X_2 = k) = 1$

b) On écrit $X_2 = X_1 + Y$, où Y est le nombre aléatoire de tirages juste nécessaire, à partir de l'obtention d'une première boule incolore, pour obtenir une deuxième boule incolore. Quelle est la loi de Y ? Calculer l'espérance de X_2.

4) Dans cette question, on effectue des tirages jusqu'à l'obtention d'une première boule incolore et on note Z le nombre aléatoire de boules rouges obtenues avant cette première boule incolore.

Déterminer la loi du couple (X_1, Z).

En déduire la loi de Z.

PROBLÈME (10 points)

Partie I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ et $\gamma_n = u_n - \ln n$. (ln désignant la fonction « logarithme népérien »).

1) Montrer que pour tout entier k, au moins égal à deux, on a : $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.

En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln n \leq u_n \leq 1 + \ln n$.

2) Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n>0}$ est monotone, en déduire que cette suite est convergente. Dans toute la suite sa limite sera notée γ.

3) Pour tout entier k, au moins égal à deux, on pose : $v_k = \int_{k-1}^{k} \frac{t - k + 1}{t^2} dt$.

Montrer que : $\forall k \geq 2 \, ; \, 0 \leq v_k \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

Montrer que la série de terme général v_k est convergente, et que : $\gamma_n - \gamma = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$.

En déduire que : $0 \leq \gamma_n - \gamma \leq \frac{1}{n}$.

4) La convergence de la suite (γ_n) vers γ est donc lente : on se propose d'accélérer cette convergence. Pour cela :

a) Montrer, à l'aide d'intégrations par parties, que pour $k \geq 2$, on a :

$$\int_0^1 \frac{x(1-x)(1-2x)}{(x+k-1)^4}\,dx = 2.v_k + \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right] + \frac{1}{6} \times \left[\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\right].$$

b) Montrer que pour $k \geq 2$ on a :

$$\int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{(x+k-1)^5}\,dx = v_k + \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right] + \frac{1}{12} \times \left[\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\right].$$

c) On pose $I_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{(x+k-1)^5}\,dx$.

i) Quel est le maximum de la fonction $x \mapsto x(1-x)$ sur le segment $[0,1]$?

ii) En déduire que, pour $k \geq 2 : 0 \leq I_k \leq \frac{1}{64}\left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k-1)^4}\right)$.

iii) En conclure que, pour pour $n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq \gamma_n - \gamma - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} \leq \frac{1}{64.n^4}$.

d) Soit ε un nombre réel strictement positif. Pour quelles valeurs de n peut-on affirmer que $a_n = \gamma_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2}$ est une valeur approchée de γ avec une erreur inférieure à ε ?

e) Donner en particulier une valeur approchée de γ, avec une erreur inférieure à 5.10^{-3}.

Partie II

1) Montrer que, pour $x > -1$, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,n], \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-t}$.

2) Montrer que, pour $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, on a : $x - x^2 \leq \ln(1+x)$.
En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 4$ et $t \in [0, \sqrt{n}[: t + n.\ln(1 - \frac{t}{n}) \geq -\frac{t^2}{n} \geq \ln(1 - \frac{t^2}{n})$.
Puis que : pour $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 4$ et $t \in [0,n] : (1 - \frac{t}{n})^n \geq \mathrm{e}^{-t}(1 - \frac{t^2}{n})$.

3) En déduire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4, \forall t \in [0,n]$:

$$0 \leq \mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{1}{n} \cdot t^2 \mathrm{e}^{-t}.$$

4) a) Montrer que l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}.\ln(t)\,dt$ est convergente.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $J_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.\ln(t)\,dt$.

On admet que l'on a $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = -\gamma$ (ceci pourrait se démontrer à l'aide d'une intégration par parties et d'un changement de variable, ...).
A l'aide de la question 3), en déduire que K vaut $-\gamma$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail